Henri LEBESGUE

LA MESURE DES GRANDEURS

NOUVEAU TIRAGE (1975)

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ALBERT BLANCHARD

9, rue de Médecis Paris 6^e

Extraits

INTRODUCTION

[...]

Depuis 1910 je m'occupe, à l'une ou l'autre des deux Écoles normales supérieures, masculine et féminine, de la préparation des futurs professeurs de l'Enseignement secondaire. L'un des exercices de cette préparation consiste en leçons portant sur les programmes des classes de l'Enseignement secondaire. J'ai eu ainsi l'occasion de réfléchir à ces programmes, de voir quelles étaient les difficultés qui faisaient le plus souvent trébucher les jeunes professeurs, d'être frappé de la fréquence de certaines qualités et de certains défauts ; aussi d'examiner des manuels et, par eux, comme par les rapports des jurys, d'être averti des tendances actuelles du corps enseignant. Comme, d'autre part, je suis à même de juger des résultats de l'enseignement depuis trente ans que je fais passer des examens pour le baccalauréat ou pour l'entrée dans des écoles, on ne s'étonnera pas que l'idée me soit venue d'écrire des articles de nature pédagogique ; si j'ose employer ce qualificatif qui suffit ordinairement pour faire fuir les mathématiciens.

Dans les pages qui vont paraître dans *L'Enseignement mathématique* je m'occuperai de la mesure des grandeurs. Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. Aussi parle-t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur ; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignements fournit un exemple de ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le figiolage verbal de leçons isolées. [...]

I. - COMPARAISONS DES COLLECTIONS ; NOMBRES ENTIERS.

1. - Un tout jeune enfant, invité à prendre un bonbon et à en donner à ses deux sœurs, s'assurera d'abord de sa part, puis portera un bonbon à l'une de ses sœurs et reviendra en chercher un autre pour le porter à son tour. Plus âgé, il évitera ses allées et venues ; il prendra les trois bonbons en disant : pour moi, pour Louise, pour Renée.

On imagine volontiers, et les constatations faites chez certaines peuplades primitives semblent confirmer cette hypothèse, que par un mécanisme analogue les hommes en sont arrivés, quand ils veulent comparer deux collections, à *compter*, c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase. Ces mots sont appelés des *nombres*. Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection.

Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences : les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections que l'on peut former à partir de collections déjà dénombrées.

A l'occasion de ces règles on constate divers faits que l'on énonce ordinairement comme théorèmes mais dont les prétendues démonstrations sont en réalité des vérifications expérimentales par exemple, le théorème : un produit est indépendant de l'ordre des facteurs - lesquelles dérivent toutes de cette constatation générale : le nombre attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection.

[...]

Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

[...]

LONGUEURS ; NOMBRES.

7. - Je vais encore commencer par un bref résumé d'un exposé. Je le choisis en accord avec la manière traditionnelle de présenter la géométrie dans laquelle les mouvements sont utilisés pour explorer l'espace. Cette manière est, à coup sûr, celle qui s'écarte le moins des démarches qu'ont dû faire nos ancêtres pour conquérir les vérités expérimentales qui sont à la base de la géométrie.

Dans cet exposé, après avoir indiqué des besoins qui ont pu conduire les hommes à comparer des distances, à définir les mots distances égales ou inégales, je décrirais le procédé de comparaison : soit à comparer AB et le segment U , appelé l'unité. Portons U sur la demi-droite AB , à partir de A en $A\alpha$, puis à la suite en $\alpha\beta$, etc. Et soit A_1 la dernière extrémité ainsi atteinte avant de dépasser B . Si on a atteint A en portant 3 fois U on dira que la longueur de AB (sous-entendu avec l'unité U) est 3 si A_1 est en B ; dans le cas contraire, on dira que la longueur de AB est supérieure à 3 et inférieure à 4. Expriment par là que B est toujours l'un des points du segment A_1B_1 d'origine A_1 et égal à U , mais n'est jamais le point B_1 .

Divisons U en 10 parties égales; c'est-à-dire prenons un segment U_1 avec lequel la mesure de U soit 10 et recommençons les opérations ; nous arriverons à un segment A_2B_2 contenu dans A_1B_1 et la longueur de AA_2 avec l'unité U_1 sera comprise entre 30 et 39 ; soit, par exemple, 37. La longueur de AB avec l'unité U_1 sera dite au moins égale à 37 et inférieure à 38.

En passant de même de U_1 à un segment U_2 , on arrivera par exemple à 376 et, 377 ; puis à 3760 et 3761 ; puis à 37602 et 37603, etc. [...]

On aboutirait ainsi à la notation ordinaire des nombres. Dans cette notation, les zéros placés à la gauche de l'entier obtenu au 1^{er} stade (lequel peut être zéro) n'ont aucune importance ; par analogie, lorsqu'il arrive que tous les chiffres de droite sont des zéros à partir de l'un d'eux, on convient volontiers de les omettre en conservant toutefois ceux de ces zéros qui seraient avant la virgule. On dit alors qu'il s'agit d'un nombre décimal exact.

8. - On notera, pour plus tard, que nous sommes passés directement de la notion d'entier à celle du nombre le plus général sans avoir à utiliser ou, si l'on veut, à dégager ni celle de nombre décimal exact, ni celle de nombre rationnel. Le terme de nombre décimal exact vient d'être donné ici pour bien marquer qu'il n'avait pas encore été employé.

[...]

16. - Toujours le même depuis l'enseignement primaire jusqu'au seuil de l'enseignement supérieur, cet exposé serait plus ou moins développé suivant l'âge des élèves ; aux jeunes on affirmerait surtout, on ne démontrerait guère, exactement comme on le fait maintenant d'ailleurs ; aux plus âgés, on démontrerait davantage ; tout ce qui peut être démontré si on le trouvait indispensable, - ce qui n'est d'ailleurs pas mon opinion. En tout cas ce que l'on démontrerait apparaîtrait bien, aux yeux de tous comme la légitimation logique de faits déjà connus, acceptés, utilisés.

Arrivés dans l'enseignement supérieur, les élèves auraient la maturité voulue pour suivre une analyse plus complète du procédé jusque là employé pour définir les nombres. On leur montrerait ce qu'a de trop particulier, d'inutilement précis ce procédé : puisque, pour déterminer, et par suite pour arriver à définir, un nombre il ne suffit pas de le repérer par rapport à l'échelle trop lâche des entiers, il faut d'abord construire de nouveaux nombres (formant ce que l'on appelle un ensemble partout dense) ; cet ensemble est celui des nombres décimaux dans mon exposé, ensemble choisi de façon trop précise, aussi, utilisant dans l'exposé classique un procédé constant en mathématiques, noie-t-on cet ensemble particulier dans l'ensemble plus vaste des nombres commensurables ; enfin, l'ensemble de comparaison étant ainsi devenu à mailles indéfiniment serrées, on déterminera les nombres qui restent à définir par leurs places par rapport aux nombres déjà définis. Et c'est la méthode des coupures.

17. - A ces avantages il faut en joindre un autre, considérable à ce moment où l'allègement des programmes est une nécessité si pressante, celui de supprimer deux chapitres de l'arithmétique - ceux sur les fractions et sur les nombres décimaux - d'où, par voie de conséquence, divers autres allègements. J'ai insisté plusieurs fois sur le fait que je passais, sans intermédiaire, du nombre entier au nombre quelconque ; le moment est venu de bien préciser ce que j'entends par là. Je ne veux pas dire que je vois un inconvénient quelconque à parler de la multiplication des nombres décimaux, par exemple, quelques minutes avant de parler de la multiplication des nombres quelconques ; bien au contraire, j'y vois les avantages que tout le monde aperçoit de pouvoir ainsi donner des énoncés plus concis et plus nets et de les légitimer moins lourdement. Ce que j'ai voulu dire, c'est qu'il est inutile de faire à part une théorie complète relative aux nombres décimaux. Ayant, par exemple, à parler de la multiplication, à des élèves et non à des professeurs, après avoir donné la définition générale de la multiplication qui m'a servie plus haut, je la mettrais en œuvre d'abord pour le cas où les deux nombres sont décimaux, et seulement ensuite pour le cas général. J'aurais ainsi la règle opératoire pour les nombres décimaux exacts quelques minutes avant la règle générale ; je *ne démontrerais les propriétés de la multiplication que d'emblée pour le cas général*.

Sauf en ce qui concerne des détails du discours, les nombres décimaux exacts et les nombres commensurables ne se présenteront à nous que comme des cas particuliers. on ne dirait donc pas un mot de la théorie des fractions, car la fraction serait tout simplement le nombre quotient exact de a par b et les opérations sur les fractions

$$a : \frac{c}{b} = \frac{ab}{c} , \quad \frac{a \times b}{b \times c} = \frac{a}{c} , \quad \dots$$

ne seraient que des cas particuliers d'opérations sur des nombres. Ainsi, on ne dirait plus un mot de la théorie des fractions dans la classe de Mathématiques parce que ce ne serait, plus utile à l'élucidation de la notion de nombre, ni des règles des opérations. Bien entendu on ne parlerait plus de la conversion des fractions ordinaires en fraction décimales, ni des nombres décimaux périodiques.

Mais parlerait-on encore des fractions dans l'enseignement primaire, dans les classes de 6^{ème} et de 5^{ème} de l'enseignement secondaire ? Non, puisque cela n'est pas indispensable à la théorie et ne sert à rien pratiquement ; car on sera bien, je pense, d'accord avec moi pour déclarer que marier des 22^{èmes} et des 37^{èmes} est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d'utilité comme circonstance atténuante. Je sais bien qu'à force de chercher on découvrirait quelques « applications » des fractions ; que certains mécaniciens pour tarauder un pas de vis font des calculs de fractions. Mais pas un sur dix d'entre eux n'a établi une relation quelconque entre la pratique du métier et l'enseignement scolaire et lorsque, par extraordinaire, ce rapport a été établi on peut affirmer que c'est la vis qui a fait comprendre les fractions bien plutôt que les fractions n'ont fait comprendre la vis.

Dans les petites classes, la réforme que je propose peut sembler se réduire au remplacement du mot fraction par un autre : rapport, par exemple. Car il faut bien s'occuper des propriétés

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} , \quad \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

et énoncer les règles correspondantes relatives au calcul du rapport de deux nombres (quelconques et non plus nécessairement entiers). Pourtant, la réforme serait effective si l'on consentait à ce que les enfants n'étudient plus deux numérations, la numération des $n^{\text{èmes}}$ pour les nombres commensurables et la numération décimale ; si on leur permettait de trouver 0,428 là où la réponse est $\frac{3}{7}$

Sans doute a divisé par b , a sur b , se lit encore a b -ièmes quand a et b sont entiers, mais cette locution n'oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n'oblige à traiter de la numération à base vingt.

18. - J'entends tous les Professeurs protester. Les uns parce que les fractions fournissaient d'innombrables exercices pour leurs jeunes élèves ; après un moment d'effroi, ceux-ci s'apercevront qu'ils ne manqueront jamais d'exercices. La plainte des autres m'émeut davantage et, pour dire la vérité, je la formule moi aussi : « Supprimer dans la classe de Mathématiques la théorie des fractions, c'est supprimer un chapitre admirable. Le seul peut-être, parmi ceux qui nous restent, qui ne soit pas là uniquement pour son utilité immédiate et qui donne le sentiment de la beauté pure. »

Rappelons-nous ce que, dans nos discussions, nous objectons aux Professeurs des autres spécialités : qu'un enseignement n'est pas plus désintéressé parce qu'il est sans intérêt pratique, qu'il risque seulement alors d'être sans intérêt aucun pour les élèves ; qu'au contraire, parce que toutes les spécialités peuvent efficacement concourir à la culture, et puisque toutes exigent les longs efforts d'apprentissage de techniques, on choisira si possible celles dont les techniques sont pratiquement les plus utiles ; que, certes, le professeur doit profiter des occasions pour mettre les élèves en face de la beauté mais que pourtant la beauté n'est pas matière à enseignement, qu'en prétendant enseigner la beauté on n'arrive qu'à déformer le goût et à former des snobs. Tout cela, qui est valable pour les autres est valable pour nous ; c'est pourquoi on a vu, aux différents degrés de notre enseignement, disparaître des programmes des choses très belles mais qui ont dû céder la place à d'autres plus immédiatement utiles à tous. Pour prendre un exemple assez ancien pour que toute discussion soit apaisée, ce n'est, pas sans regret que les Professeurs ont vu disparaître l'analyse indéterminée et la théorie des fractions continues. N'est-il pas naturel cependant que ces doctrines, fort intéressantes au point de vue mathématique mais fort spéciales, et n'ayant aucune importance pratique ne soient enseignées qu'à un tout petit cercle d'étudiants triés ?

D'une façon générale, si tous les calculs finis, exacts, les seuls qu'admettaient les Anciens, ont conservé toute leur importance mathématique, s'ils doivent être connus et étudiés par les mathématiciens actuels, leur importance pratique a considérablement diminué, et est parfois disparue totalement. Partout ces calculs, dits exacts, ont été détrônés par les calculs approchés et souvent les calculs exacts ne sont considérés que parce qu'ils conduisent au mode le plus simple de calcul approché. Dans les cours de licence, on ne cherche plus, comme autrefois, à multiplier indéfiniment les cas où l'on peut intégrer exactement une équation différentielle ou calculer exactement une quadrature ; on passe au plus vite sur ces techniques qui ne sont plus en accord avec les autres chapitres où l'on étudie les intégrales et les quadratures sans faire appel à des expressions explicites exactes. De même, dans nos classes de mathématiques spéciales, on ne s'occupe plus de la résolution algébrique des équations. D'une de ces questions à l'autre la notion de calcul exact se modifie ; mais, dans chaque question, le mot exact s'applique à un moyen d'écartier un emploi de l'infini, or la notion d'infini est admise dans la pratique ; la notion de limite n'y est pas mystérieuse puisque là deux états suffisamment voisins sont pratiquement identiques. Le Mathématicien, parce qu'à l'exemple des Grecs, il s'est obligé à éviter l'emploi des limites, a dû créer des méthodes, nouvelles arithmétiques et nouvelles algèbres, où les opérations sont définies seulement pour celles des expressions que l'on y regarde comme exactes, ou pour mieux dire comme existantes, on comprend qu'il y ait divorce entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Plus l'enseignement est élémentaire plus le point de vue de celles-ci doit être pris en considération ; mais il serait déplorable pour le progrès des mathématiques qu'il n'y ait pas un enseignement, ne s'adressant qu'à des mathématiciens, dans lequel on adopterait l'autre point de vue.

Lorsque l'on classe par ordre de complication les expressions exactes, avant celles où figurent des quadratures, avant, celles où ne figurent que les symboles de fonctions élémentaires, avant même celles où ne figurent que des radicaux algébriques, se trouve l'expression ; la plus simple des expressions exactes. La seule vraiment exacte pour les Grecs, car, pour eux, les nombres commensurables étaient les seuls qu'on pouvait atteindre ou, si l'on veut, appréhender ; la seule débarrassée à leurs yeux de toute idée d'infini.

Il est clair que c'est une survivance de ces idées périmées qui nous fait tant tenir aux nombres commensurables, nous nous cramponnons à eux comme aux seuls vestiges d'un enseignement disparu. Ne faudrait-il pas mieux reconnaître que la place de l'étude des nombres commensurables n'est plus en classe de Mathématiques ; qu'il n'y aurait aucun scandale à supprimer dans cette classe

le chapitre sur les fractions. Le scandale est autre part ; il n'est pas à craindre pour l'avenir, il existe déjà : ce qui est scandaleux c'est que, dans certains pays, en France par exemple, on puisse achever ses études de mathématicien sans avoir jamais entendu parler de ces arithmétiques et algèbres nouvelles dont l'étude des fractions, considérées comme ensembles de deux nombres, n'est qu'un tout premier chapitre d'introduction, et qui forment l'une des parties très vivantes des mathématiques actuelles.

19. - La modification que je propose consiste donc à remplacer en arithmétique les chapitres sur les fractions, sur les nombres décimaux, sur les fractions décimales périodiques, sur les calculs approchés par un unique chapitre sur la mesure des longueurs et les opérations sur les nombres, Ce chapitre serait aussi le premier en quelque sorte de la géométrie et l'on serait donc fondé à parler, en géométrie, de la distance de deux points. Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie ; on n'en parle qu'au troisième, après avoir parlé au second, de la mesure des angles et des arcs. Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité ; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait les produits en croix, A ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres.

[...]

CONCLUSION

D'ordinaire, dès qu'il s'agit des fondements des mathématiques, on adopte le point de vue philosophique ; je m'y suis refusé délibérément et certains ont vu dans cette attitude la marque d'un mépris envers la philosophie.

Non ; mon bon maître, Jules Tannery, disait : « Il est prudent de respecter, au moins provisoirement, ce que l'on ignore ». D'autre part, si ignorant que je sois, je n'oublie pas que c'est parce que des philosophes ont longuement médité sur des problèmes, si difficiles qu'on ne peut même les formuler, qu'ils sont parvenus à en isoler des questions plus simples : celles dont s'occupent les sciences.

Nous devons respecter la philosophie ; il ne s'ensuit pourtant pas qu'elle puisse nous aider ni à comprendre mieux nos sciences, ni à les faire progresser. C'est un fait que les sciences se sont développées surtout quand elles ont pris conscience de leur individualité et se sont séparées de la philosophie.

Que les philosophes recherchent si quelque méthode, ayant fait ses preuves dans le domaine scientifique, ne pourrait pas leur être utile, cela est naturel et raisonnable ; c'est aller du facile au difficile. Mais que les mathématiques, qui étudient des questions si simples qu'on peut en donner des solutions précises et définitives, aillent demander des ressources à la philosophie, qui doit se contenter de réponses imprécises et précaires, je n'ai pu l'admettre.

D'ailleurs, les problèmes philosophiques ont été, depuis des siècles, retournés en tous sens par des hommes dont certains ont eu du génie ; n'y aurait-il pas, de la part d'un mathématicien qui se croirait autorisé à apporter ses solutions philosophiques parce qu'il aurait consacré quelques loisirs à des réflexions, une prétention insupportable et naïve tout à la fois ? En avouant franchement mon incompetence, je crois faire preuve, envers la philosophie, d'un respect autrement sincère.

A mon avis, le mathématicien, en tant que mathématicien, n'a pas à se préoccuper de philosophie ; opinion qui, d'ailleurs, a été formulée par bien des philosophes. Ses efforts de réflexion, de compréhension doivent être en quelque sorte intérieurs aux mathématiques au lieu de porter sur les rapports de celles-ci avec la philosophie. Certes, les questions dont il a à s'occuper n'ont ni le même genre de beauté, ni le poignant intérêt humain des problèmes philosophiques ; pourtant, si l'on parvenait à édifier une philosophie de la science pour la science, cette philosophie de seconde zone serait peut-être l'aide la plus efficace pour la vraie philosophie.

Le professeur de mathématiques doit, lui aussi, savoir borner le domaine de son activité à ce qui est objectif ; il est chargé de culture scientifique, son collègue de philosophie est, seul chargé de la

culture philosophique.

En s'occupant ainsi seulement de ce qui est en quelque sorte matériel, manuel, on fait nécessairement des mathématiques une des branches de la physique. Branche qui toutefois se différencie des autres en ce qu'on n'y fait appel à l'observation qu'au début, pour acquérir définitions et axiomes. Lorsqu'un mathématicien a prévu plus ou moins nettement une proposition, au lieu d'avoir recours à l'expérience, comme le ferait un physicien, il cherche une démonstration logique ; la vérification logique remplace pour lui la vérification expérimentale. En somme, il ne cherche pas à découvrir du nouveau, il essaie de prendre conscience des richesses qu'il possède déjà inconsciemment, qui sont enfermées dans les définitions et dans les axiomes. D'où l'importance capitale de ces définitions et axiomes qui, certes, ne sont assujettis logiquement qu'à la condition d'être compatibles, mais qui ne conduiraient qu'à une science purement formelle, vide de sens, s'ils étaient sans rapport avec la réalité.

Le professeur de mathématiques, celui de l'Enseignement secondaire en particulier, n'a pas à former de purs logiciens, il doit contribuer à façonner des hommes raisonnables et pour cela il lui faut s'occuper non seulement des raisonnements logiques mais encore de l'acquisition des prémisses de ces raisonnements et de l'application de leurs résultats au concret. Dans les questions traitées ici je n'ai guère eu l'occasion de parler de ce dernier point ; il n'en est pas moins essentiel. Faute de bien indiquer le départ du concret et le retour au concret on risquerait de faire acquérir aux élèves l'esprit géométrique dans le sens péjoratif du terme, de les inciter à raisonner imperturbablement à partir de données non assurées, Il faut faire concevoir aux élèves qu'en dehors des mathématiques on ne démontre rien mathématiquement et, que, pourtant, la logique est utile en toutes circonstances. Les mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins et elles leur sont, en fait, un auxiliaire précieux ; le professeur de mathématiques doit rester un professeur d'action. Il ne lui appartient pas d'éveiller le doute philosophique, car il n'aurait pas, comme son collègue de philosophie, le temps et les moyens de l'éveiller et de le discipliner tout à la fois.

Je ne crois pas que ce soit assez d'exiger que les futurs professeurs aient acquis une habileté technique et qu'ils sachent débiter des manuels ; il faudrait leur avoir demandé de réfléchir longuement à ce qu'ils auront à enseigner dans un esprit de critique logique et pédagogique ; d'avoir fait, seuls ou aidés par quelque enseignement, sur chaque grand chapitre, une étude analogue à celle que j'ai indiquée ici pour ce qui concerne la mesure des grandeurs.

Quels enseignements de futurs professeurs pourraient-ils tirer de cette étude ? Il est certain tout d'abord que pour choisir en connaissance de cause entre les divers exposés des faits mathématiques il faut les avoir comparés, en avoir cherché le fort et le faible. Que, ce faisant, on se met en mesure d'en construire de nouveaux, si besoin est. Tout cela est trop clair, passons à des bénéfices plus cachés. En scrutant les raisonnements, si l'on voit toute la puissance de la logique, on aperçoit aussi toutes ses exigences et l'on prend conscience des précautions indispensables dans les mathématiques appliquées.

Nos raisonnements absolus ne nous conduisent, dans les applications, qu'à des vérités relatives. C'est qu'il y a toujours quelque désaccord entre nos prémisses logiques et la réalité qu'elles prétendent traduire. Par exemple, nous avons rencontré la vieille question des irrationnelles : les Anciens avaient construit, à l'aide des fractions, un continu parfaitement suffisant pour toutes les expériences humaines, quelque précision qu'elles puissent atteindre, mais insuffisant logiquement. Il nous a fallu prolonger métaphysiquement la suite des opérations de mesure pour obtenir la notion sur laquelle nous pouvons raisonner logiquement. Pour étudier le concret, ou ce qui nous paraît être tel, il nous a fallu procéder à un élargissement du réel.

[...]

Un professeur de physique ne se croit pas tenu, par respect de l'expérience, à cacher l'intervention de l'intelligence dans les recherches physiques, trop de professeurs de mathématiques se croient tenus, par respect de la logique, à présenter les mathématiques comme le déroulement, inéluctable d'une déduction à voie unique. Si quelques noms de mathématiciens n'étaient accolés, à tort ou à raison, à certains théorèmes, les élèves pourraient oublier que les mathématiques ne sont qu'œuvre humaine. On ne parle jamais du choix des prémisses, on n'ose pas dire que telle proposition a été

obtenue grâce aux qualités *d'imagination* d'un savant ; on confond avec la découverte d'une proposition sa présentation logique faite à la mode actuelle. A entendre certains professeurs, on croirait que Newton n'a rien compris à l'intégration, que Euler ignorait les séries, que Lagrange ne savait pas ce qu'était une fonction. On cherche partout des démonstrations naturelles - on m'a parlé de quelqu'un qui se félicitait d'avoir enfin trouvé, après six mois de recherches, une démonstration naturelle du fait que les trois hauteurs d'un triangle concourent ! - et l'on croit, grâce à ces démonstrations naturelles, enseigner l'art de découvrir.

S'il était vrai que la méthode de la redécouverte soit la véritable méthode de découverte, ça se saurait ; car nous serions noyés sous les découvertes des innombrables protagonistes de la redécouverte. Mais, tout au contraire, un enseignement basé trop systématiquement sur la redécouverte serait l'enseignement même de la non découverte car, pour découvrir, il faut faire un rapprochement inhabituel, *non naturel*, et la méthode de la redécouverte consiste à guider les élèves vers certains raisonnements catalogués, toujours les mêmes, et à apprendre aux élèves à les essayer successivement, sans omission. Cela permet, certes, de résoudre les problèmes parce qu'on propose des problèmes justiciables des raisonnements en question ; mais cette taylorisation du travail intellectuel, ce dressage, est tout différent, est tout le contraire de l'assouplissement qui permet à l'intelligence de découvrir de nouveaux points de vue.

La méthode de la redécouverte est d'ailleurs excellente ; elle a joué le rôle principal dans cette transformation de l'enseignement des mathématiques dans les lycées qui a remplacé les classes mornes d'autrefois, où les élèves n'avaient qu'un rôle réceptif, par les classes vivantes de maintenant où les élèves, ayant un rôle actif, sentent mieux la signification, la portée, l'intérêt, le but des propositions. Il est excellent aussi d'employer des démonstrations montrant la parenté du raisonnement utilisé avec les raisonnements familiers aux élèves, démonstrations que l'on appelle naturelles pour cette raison ; en concevant qu'on ait pu construire ces démonstrations, les élèves les comprennent mieux et prennent confiance en leurs propres moyens. Mais il ne faut pas demander à la redécouverte et aux démonstrations naturelles ce qu'elles ne peuvent donner, Ce sont d'excellents moyens pédagogiques ; rien de plus. Et ces moyens deviendraient néfastes s'ils servaient à masquer le rôle de l'intelligence, à suggérer que faire des mathématiques c'est appliquer à la lettre des sortes de règlements.

[...]

Parlant du nombre entier, nous nous sommes bornés à décrire l'opération de dénombrement. N'aurions-nous pas dû examiner la notion d'objets, de corps à dénombrer ? La notion de corps n'est claire que pour qui ne la critique pas ; la physique la détruit peu à peu. On sait depuis toujours que le corps solide le mieux poli a des anfractuosités, des pores, que, dans des cavités ou dans sa matière même, sont inclus d'autres corps, des impuretés, des liquides, des gaz ; puis les théories atomiques des corps, les théories planétaires des atomes rendent la notion de corps de plus en plus incertaine. La division en corps, est-elle autre chose qu'une construction simpliste du monde à l'aide d'images de notre moi, la seule chose dont nos ancêtres primitifs avaient un peu nettement conscience ? Si la notion de corps n'a aucune valeur absolue, celle d'entier, même celle du nombre *un*, n'est-elle pas la plus fausse de toutes les notions ? Et que dire alors de la notion de nombre en général que nous n'avons atteinte qu'en remplaçant la notion vague de corps par celle plus insaisissable de point ?