

Arithmétique

Vocabulaire

$$\begin{array}{r|l} 156 & 12 \\ 36 & 13 \\ 0 & \\ \hline \end{array}$$

↑ le reste est nul,
donc $12 \times 13 = 156$

Ces trois phrases sont synonymes

156 est **divisible** par 12

12 est un **diviseur** de 156

156 est un **multiple** de 12

Multiple ou diviseur ?

Les multiples de 12 s'obtiennent en multipliant 12 par un nombre entier.

Les multiples de 12 = $\{ 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ;; 12\ 000 ;; 12\ 240\ 036 ; ... \}$

Les multiples de 12 sont supérieurs ou égaux à 12 (à part 0).

Il en existe une infinité.

Les diviseurs de 12 = $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$

Les diviseurs de 12 sont inférieurs ou égaux à 12

$$12 = 1 \times 12$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$12 = 3 \times 4$$

Caractères de divisibilité

LES MULTIPLES DE **10** sont les nombres dont le **dernier chiffre** est 0

LES MULTIPLES DE **5** sont les nombres dont le **dernier chiffre** est 0 ou 5

LES MULTIPLES DE **2** sont les nombres dont le **dernier chiffre** est 0, 2, 4, 6 ou 8

LES MULTIPLES DE **3** sont les nombres dont la **somme des chiffres** est un multiple de 3

LES MULTIPLES DE **9** sont les nombres dont la **somme des chiffres** est un multiple de 9

exemple : 15 389 n'est pas divisible par 9 car $1 + 5 + 3 + 8 + 9 = 26$

15 381 est divisible par 9 car $1 + 5 + 3 + 8 + 1 = 18 = 2 \times 9$

Trouver tous les diviseurs d'un nombre

Principe : on essaie tous les diviseurs, mais on peut facilement en éliminer sans effectuer la division.

$$63 = 1 \times 63$$

$$63 = 3 \times 21$$

$$63 = 7 \times 9$$

63 n'est pas divisible par 2, il n'est donc divisible ni par 4 ni par 6, ni par 8.

Inutile de continuer, on a déjà tous les diviseurs supérieurs à 9.

Les diviseurs de 63 = $\{ 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63 \}$

Les nombres premiers

On appelle **nombre premier**, un nombre qui n'admet pas de diviseurs, à part 1 et lui-même.

Les premiers nombres premiers sont : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

Les diviseurs communs

Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{540}{630} = \frac{54}{63} = \frac{6}{7}$$

La fraction $\frac{6}{7}$ ne peut plus être simplifiée,
elle est **irréductible**.

10 est un **diviseur commun** de 540 et 630

6 et 7 n'ont aucun diviseur commun (à part 1), on dit qu'ils sont **premiers entre eux**.

$$\frac{540}{630} = \frac{6}{7}$$

: 90

90 est **le plus grand diviseur commun** à 540 et 630
on note **PGCD (540 ; 630) = 90**

Trouver le PGCD de deux nombres

Méthode 1 :

la liste des diviseurs

diviseurs de 48 = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 }

diviseurs de 18 = { 1, 2, 3, 6, 9, 18}

$$\text{PGCD} (48 ; 18) = 6$$

Méthode 2 :

la décomposition en facteurs premiers

$$48 = 6 \times 8 = 2 \times 3 \times 2 \times 4 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$18 = 3 \times 6 = 3 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 3$$

Au cours de la décomposition, les nombres diminuent jusqu'à ce qu'ils ne soient plus possible d'en décomposer aucun. Ils sont donc premiers.

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

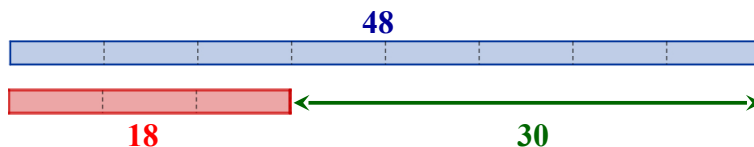
$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{PGCD} (48 ; 18) = 2 \times 3 = 6$$

Méthode 3 :

l'algorithme d'Euclide

Cet algorithme est basé sur le fait que les diviseurs communs à deux nombres divisent aussi leur différence.



$$\text{PGCD} (48 ; 18) = \text{PGCD} (30 ; 18)$$

$$48 - 18 = 30$$

$$30 - 18 = 12$$

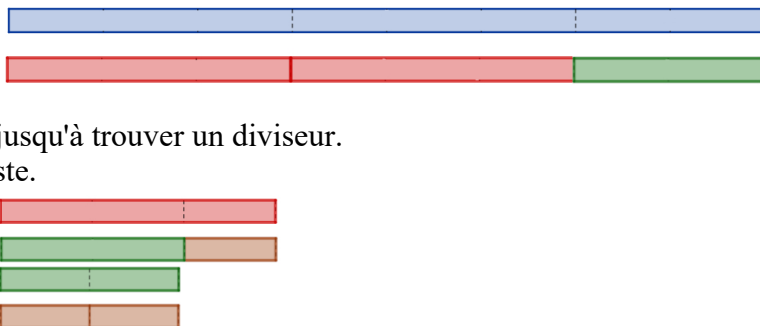
On soustrait les deux plus petits nombres jusqu'à trouver un diviseur.
Sinon on recommence avec le nouveau reste.

$$18 - 12 = 6$$

$$12 - 6 = 6$$

$$6 - 6 = 0$$

$$\text{PGCD} (48 ; 18) = 6$$



Disposition des calculs par soustractions.

48	18	12
-18	-12	-6
30	6	6
-18		-6
12		0

Pour accélérer les calculs avec les grands nombres, on peut utiliser des divisions euclidiennes.

$\begin{array}{r} 48 \overline{)18} \\ 12 \overline{)2} \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \overline{)12} \\ 6 \overline{)1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \overline{)6} \\ 0 \overline{)2} \end{array}$
--	---	--