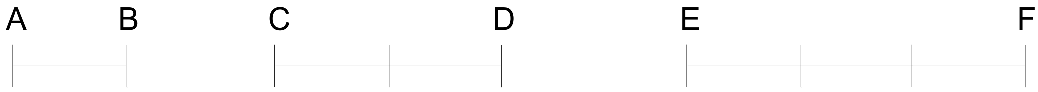
Une petite histoire de $\mathbb{Q}$

1) La théorie des proportions

Notre histoire commence avec la comparaison des longueurs, vers – 500 , en Grèce.



Dans le meilleur des cas, le plus petit segment est compris un nombre entier de fois dans le plus grand.

Ainsi $CD = 2AB$ et $EF = 3AB$.

Pour les autres cas, si on dispose, comme ici, d'une unité commune, on peut énoncer :

***CD* est à *EF* comme 2 est à 3**

On dirait aujourd'hui $\frac{CD}{2}=\frac{EF}{3}$ ou $\frac{CD}{EF}=\frac{2}{3}$ ou $CD=\frac{2}{3}EF$

La notation actuelle des fractions avec la barre et les termes « numérateur » et « dénominateur » n'apparut qu'au XIV$^{\text{ème}}$ siècle chez le mathématicien *Nicolas Oresme* .

Vocabulaire :

AB est une ***commune mesure*** de *CD* et *EF*

CD et *EF sont* ***commensurables***

le couple (2 , 3) forme un ***rapport***

« *CD* est à *EF* comme 2 est à 3 » est une ***proportion*** (égalité de deux rapports)

Cette tablette mésopotamienne écrite entre -1900 et -1600 montre que la recherche du rapport entre la diagonale du carré et son côté occupait les mathématiciens depuis longtemps.

La tablette **YBC 7289**

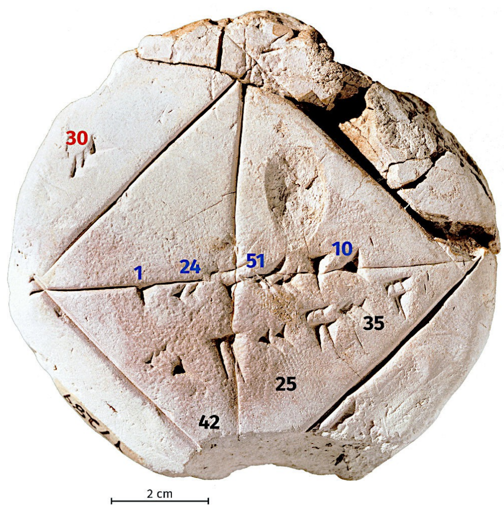
Les nombres y sont gravés en écriture cunéiforme.

On y trouve les valeurs de 1/2, de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{2}/2$ écrites en numération sexagésimale,

précises jusqu'à la 6$^{\text{e}}$ décimale :

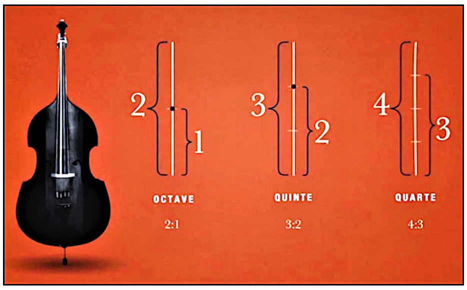
$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{305\ 470}{216\ 000} = 1{,}414\ 212\ 9\ \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 56\ \ldots$$



La question qui se posa naturellement était de savoir si tout rapport de longueurs pouvait s'exprimer par un rapport de nombres entiers.

Les Pythagoriciens y croyaient fermement. Ils expliquaient le monde physique par une harmonie exprimée dans des rapports numériques simples (entiers).



Cette croyance aurait pour origine leur découverte des relations entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son émis.

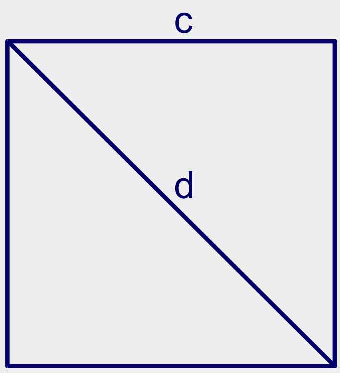
Pour eux la musique était mathématique.

Les Pythagoriciens pensaient donc, même s'ils ne pouvaient pas le calculer, qu'un tel rapport existait entre le côté et la diagonale du carré, jusqu'à ce que l'un d'entre eux en démontre l'impossibilité.
La légende dit qu'il fut passé par dessus bord pour avoir divulgué ce résultat.

En voici une **démonstration** citée par Aristote et Euclide :

Hypothèse : il existe une commune mesure (une unité) qui mesure le côté et la diagonale du cube avec deux nombres entiers.

Si les deux nombres sont pairs, on remplace l'unité par son double et on recommence si nécessaire.
Appelons c et d les deux entiers ainsi obtenus. **c et d ne sont pas tous les deux pairs.**



d'après Pythagore $c^2 + c^2 = d^2$

soit $2c^2 = d^2$

donc d est pair

posons $d = 2k$

$d^2 = 4k^2$

en remplaçant $2c^2 = 4k^2$

ou $c^2 = 2d^2$

donc c est pair.

c et d sont tous les deux pairs.

Conclusion : Il y a une contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse.

La diagonale du carré n'est pas commensurable à son côté.

Cette démonstration par l'absurde vint ruiner la doctrine qui voulait que tout fût nombre (entier).

$\sqrt{2}$ **n'existe pas !**

Pour autant les Grecs ne renoncèrent pas à utiliser les rapports.
Pour eux, le rapport de deux grandeurs homogènes existe toujours mais il existe des rapports inexprimables par des nombres, ils sont *irrationnels*.

Voici un exemple d'utilisation :

La démonstration du "théorème de Thalès"

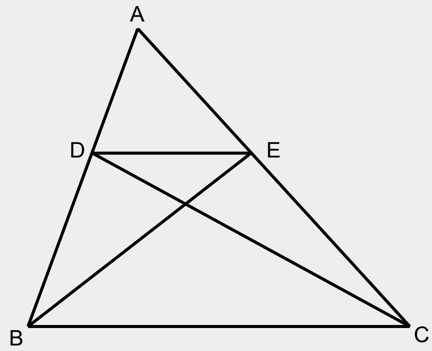
Éléments d'Euclide LIVRE 6

Proposition 1

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leur base.

Proposition 2

Si on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, alors cette droite coupe proportionnellement les côtés de ce triangle .



Démonstration :

ADE et EDB ont une hauteur commune d'où

AD est à DB comme ADE est à EDB,

De même

AE est à EC comme ADE est à EDC.

Or EDB et EDC sont égaux car ils ont

la même base DE

la même hauteur (DE parallèle à BC).

Ce qui montre que

AD est à DB comme AE est à EC.

Remarques

- *Euclide* ne calcule pas avec les rapports, ce ne sont pas des nombres, il se contente de les comparer.
- Les seuls rapports utilisés sont des rapports de grandeurs homogènes.
- Des rapports de longueurs peuvent être égaux à des rapports d'aires.

Pendant deux mille ans, la géométrie d'Euclide sera la Bible des mathématiciens et la théorie des proportions la seule méthode disponible pour étudier les grandeurs.

Par exemple, au XVII^{ème} siècle, Galilée publie ainsi ses lois du mouvement uniforme :

Théorème I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme, parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

2) L'algèbre des grandeurs

Les opérations sur les grandeurs sont très limitées chez les Grecs.

L'addition de deux longueurs se fait par juxtaposition. On en déduit la multiplication par un entier.

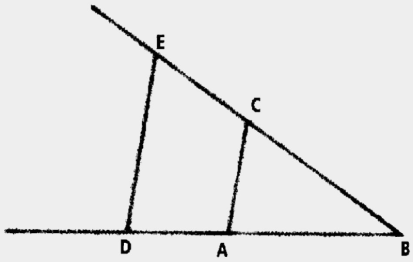
Le produit de deux longueurs donne le rectangle construit sur ces deux longueurs. Le produit de plus de trois longueurs n'a pas de sens.

Tout se passe par construction géométrique, il n'y aucun calcul numérique.

Les choses commencent à changer avec **Descartes** qui dans sa **Géométrie** (1637), montre que quelle que soit l'opération effectuée sur des longueurs, le résultat sera représenté par une longueur.

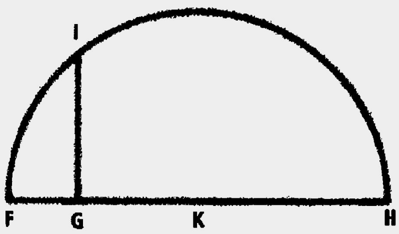
La multiplication

Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'a joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.



La racine carrée

S'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.



Ainsi l'aire d'un carré, son côté, sa diagonale et leur rapport sont de même nature.

« *la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identité*. »

Stevin (1548 , 1620)

Les courbes géométriques peuvent être définies par leurs équations**.**

Les constructions géométriques laissent la place au calcul.

Stevin invente les nombres décimaux puis **Néper** les logarithmes qui transforment les multiplications en additions, permettant ainsi le développement des calculs astronomiques.

Les nombres irrationnels deviennent d'un usage courant, les entiers et les fractions ne sont plus que des cas particuliers parmi tous les autres nombres.

Si on ne peut trouver un nombre qui multiplié par lui même produise 2, on peut trouver des nombres qui multipliés par eux même produisent un nombre aussi approchant de 2 qu'on voudra. De là il est aisé de voir, que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite qu'on voudra.

D'Alembert « Essais sur les éléments de la philosophie naturelle », (1759)

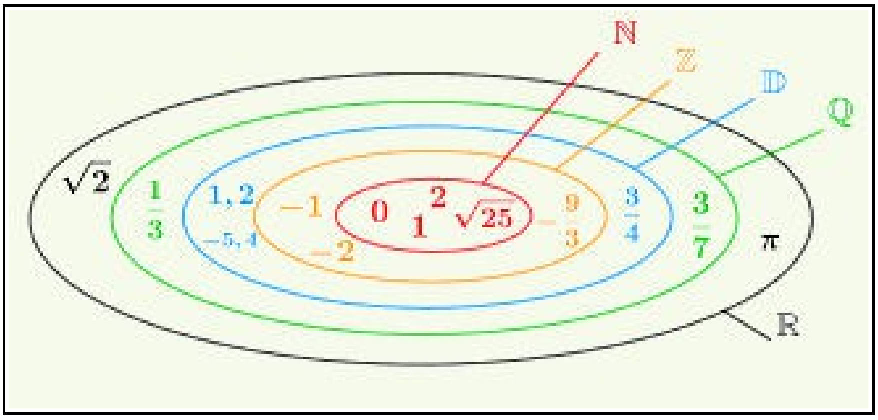
Mais les méthodes de Descartes ne s'appliquent qu'aux grandeurs géométriques. En 1687, Newton est forcé de traiter tous ses problèmes de mécanique des corps célestes en passant par des figures. Très vite, celles-ci deviennent d'une complexité effroyable.
L'étude du mouvement via la géométrie atteint ses limites. C'est Pierre Varignon qui franchit le pas en définissant la vitesse comme le quotient d'une distance par un temps. Tout d'un coup, la vitesse devient une grandeur physique, la séparation entre nombres et grandeurs a disparu.

Les conséquences sont immédiates : en quelques années, le développement des mathématiques et des sciences est considérable. Le XIX$^{\text{éme}}$ siècle devient l'âge d'or des mathématiques. Guidées par le sens physique, beaucoup de propriétés sont considérées comme allant de soi. La justification s'obtient *a posteriori*, par les résultats obtenus.

3) Les mathématiques modernes

Pendant deux mille ans, les mathématiques étaient fondées sur la structure euclidienne de l'espace physique. Avec la découverte de géométries non-euclidiennes vers 1830, le lien entre le monde réel et les mathématiques est remis en question. Les fondements doivent être reconstruits.
L'idée de continuité par exemple ne peut se contenter de l'image d'un tracé sans lever son crayon.
C'est à partir des années 1860 que s'installe l'idée de fonder les nombres réels sur un mode purement arithmétique en se passant de la géométrie, sans aucune référence à la notion de grandeur, de mouvement ou de temps qui sont renvoyés au domaine de la physique. Les mathématiques ne sont plus la science des grandeurs mais de leur mesure c'est-à-dire les nombres.
La géométrie n'est plus qu'une application, la droite est assimilée à $\mathbb{R}$, le plan à $\mathbb{R}^2$ et l'espace à $\mathbb{R}^3$.

Cantor parachève la construction avec sa théorie des ensembles infinis.



Ainsi, $\mathbb{Q}$ connut son heure de gloire pendant deux mille ans, avant de finir noyé dans $\mathbb{R}$.