

L'infini et les mathématiques

Je l'aime, moi non plus

Depuis toujours, les mathématiciens sont fascinés par l'infini. Mais effrayés par les résultats contraires à leur intuition, ils ont longtemps refusé son utilisation.

« le tout est plus grand que la partie »

C'est une vérité que l'on trouve chez Euclide et qui est mise à mal quand on aborde les ensembles infinis.

Galilée prend l'exemple des carrés (1, 4, 9, 16, ...) qui ne sont qu'une petite partie des nombres entiers, " *et pourtant, dans le nombre infini, si nous étions à même de le concevoir, nous devrions reconnaître que les carrés sont autant que tous les nombres, attendu que tout carré a sa racine et toute racine a son carré.*" (On parlerait aujourd'hui de bijection).

" Je ne vois pas d'autre parti à prendre que d'admettre qu'infinis sont les nombres, infinis les carrés, que la multitude des carrés n'est pas inférieure à celles de tous les nombres, et, en dernière conclusion, que l'égal, le plus et le moins sont des attributs qui ne conviennent pas aux infinis, mais seulement aux quantités limitées."

Cette tradition est encore bien présente au 19^{ème} siècle. Par exemple Gauss en 1831 :

Je m'élève contre l'usage de la grandeur infinie en tant qu'objet complet, ce qui en mathématiques n'est jamais acceptable. " Infini " n'est rien d'autre qu'une façon de parler, la vraie signification étant une limite que certaines grandeurs approchent indéfiniment, tandis que d'autres sont autorisées à croître sans restriction.

En résumé, pour Euclide, Galilée ou Gauss, il n'y a qu'un infini et il vaut mieux ne pas y toucher.



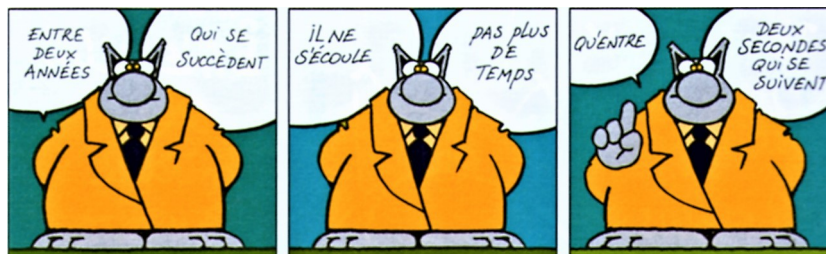
La droite réelle

Avec les graduations décimales, on peut "numéroter" une infinité de points d'une droite et entre deux nombres décimaux, on peut toujours en placer une infinité d'autres.

Pourtant cela ne suffit pas, il reste des trous. Même en utilisant deux millions de décimales, vous ne trouverez jamais de nombres décimaux égaux à $\frac{3}{7}$, $\sqrt{2}$ ou π .

Pour remplir la droite, il faut utiliser les nombres admettant un développement décimal illimité.

La droite est alors entièrement remplie, il n'y a plus de trous, mais pourtant les points ne se "touchent" pas car il y a toujours la place à en placer d'autres entre eux.



Cantor osa passer outre au tabou pour comparer tous ces infinis avec la méthode des bijections.

Il appela ensembles **dénombrables** les ensembles en bijection avec l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$. On peut compter leurs éléments un à un en continuant à l'infini si nécessaire. Il démontra que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables (*il n'y a pas plus de fractions ou de nombres décimaux que de nombres entiers!*)

Il démontra aussi que tous les infinis ne se valent pas et qu'en particulier $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Sa théorie des ensembles infinis heurta de front les conceptions établies.

Des affirmations comme " *Il y a autant de points dans un carré que sur son côté* " semblaient relever de la folie. Il écrira d'ailleurs : " *Je le vois mais je ne le crois pas* "



Les courbes pathologiques

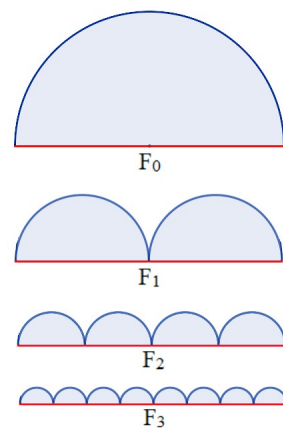
F_0 est le demi cercle bleu de diamètre rouge.

On divise ce diamètre en 2.

F_1 est la ligne bleue formée des deux nouveaux demi-cercles.

On redivise chaque diamètre en 2, on obtien F_2

formé de 4 demi-cercles puis F_3 formé de 8 demi-cercles.



Que devient la ligne bleue si on réitère cette construction à l'infini ?

- La hauteur des demi-cercles est divisée par 2 à chaque étape, sa limite est donc nulle.
- L'aire entre la courbe et le diamètre est divisée par 2 à chaque étape, sa limite est donc nulle.
- Mais malgré cela, la courbe bleue ne se confondra jamais avec le diamètre rouge car à chaque étape, sa longueur reste égale à celle de F_0 .

Les sommes infinies

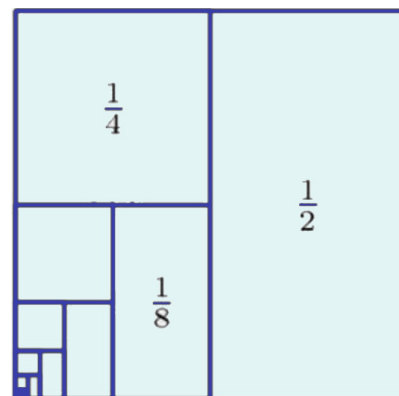
la figure ci-contre suggère que la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

remplit peu à peu le carré unité.

On peut effectivement démontrer que si on poursuit à l'infini l'on a :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$



Mais ce genre de démonstration demande énormément de précautions car les sommes infinies ne se comportent pas comme les sommes finies.

Exemple : Comment calculer $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$?

Si on calcule les sommes dans l'ordre des termes, on obtient alternativement 1 et 0

On peut aussi chercher des regroupements :

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \dots = 1$$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots) = 1 - S \quad \text{donc } S = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } 1 = 0 = \frac{1}{2} \quad !$$

En fait cette série n'a pas de somme, elle n'est pas **convergente**, et tous les calculs précédents sont illicites. Mais ce n'est pas toujours aussi simple de le savoir.

Saurez vous dire si la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ est convergente ?