La géométrie euclidienne

" *Les **Éléments** d'Euclide* " est un traité de géométrie et d'arithmétique constitué de 13 livres écrits vers - 300. Pour la première fois, tous les théorèmes sont démontrés par une méthode déductive à partir de cinq propriétés admises (les postulats ou axiomes).

Postulats:

1. On peut conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. On peut prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. On peut d'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté, plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront de ce côté.

Il servira de base à toutes les mathématiques pendant plus de 2000 ans. C'est le livre de référence qui fera de la géométrie le socle incontournable de toutes les mathématiques jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Les nombres complexes par exemple, connus et utilisés dans les calculs comme des nombres imaginaires depuis le XVI$^{\text{ème}}$ siècle, n'étaient considérés que comme des artifices de calcul. Ils ne furent reconnus comme de véritables nombres qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle après leur interprétation sous forme géométrique.

Les géométries non-euclidiennes

Plusieurs mathématiciens soupçonnèrent que le cinquième postulat pouvait être démontré à partir des autres postulats, mais toutes les tentatives échouèrent. Vers le milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, un mathématicien russe *Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski* (1793 ; 1856), un hongrois *János Bolyai* (1802-1860) et un allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) démontrèrent que le cinquième postulat est indépendant des quatre autres et qu'il est possible de construire des géométries non-euclidiennes cohérentes en prenant sa négation :

« Il existe une infinité de parallèles passant par un point extérieur à une droite donnée. »

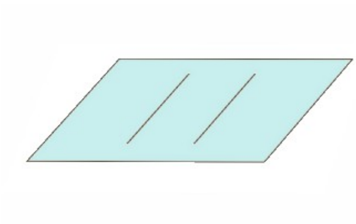
Même si cela peut paraître surprenant, ils construisirent, comme *Euclide* une nouvelle géométrie complète et cohérente, la première **géométrie non-euclidienne**.

Par la suite, d'autres géométries non euclidiennes seront créées comme la *géométrie sphérique* de l'Allemand *Bernhard Riemann* (1826-1866) :

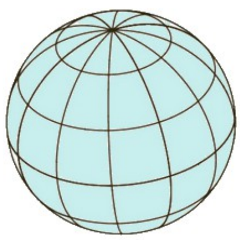
« Il n'existe pas de parallèle passant par un point extérieur à une droite donnée. »

Les implications de cette découverte en mathématiques sont considérables, le lien entre le monde réel et les mathématiques est remis en question. La géométrie euclidienne n’est pas nécessairement celle de l’espace physique, ce n'est plus qu'un modèle possible parmi d'autres. Les fondements des mathématiques qui étaient pensés à partir de cette géométrie doivent être reconstruits sur d'autres bases.

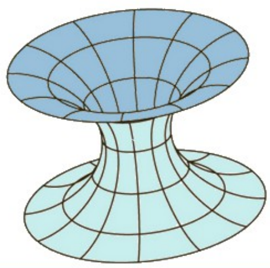
Les trois géométries à courbure constante



Euclidienne – courbure nulle C’est la géométrie la plus connue, celle que l’on apprend à l’école. Parmi ses caractéristiques, deux droites parallèles ne se coupent jamais et la somme des angles d’un triangle est égale à 180°.



Sphérique – courbure positive Il s’agit du modèle le plus simple de géométrie non euclidienne, puisqu’il suffit de se représenter la Terre pour la comprendre. Concrètement, deux parallèles, à l’image des méridiens aux pôles Nord et Sud, se coupent systématiquement et la somme des angles d’un triangle est toujours supérieure à 180°. La géométrie sphérique a des applications pratiques importantes, notamment en navigation et en astronomie.



Hyperbolique – courbure négative L’espace hyperbolique n’est pas plat ni bombé, mais courbé «vers l’intérieur», comme une selle de cheval. Par un point extérieur à une droite passent une infinité de parallèles, et la somme des angles est toujours inférieure à 180°.