COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Cette commission, présidée par J.-P. Kahane, a conduit ses travaux de 1999 à 2003

Extraits

IV. GRANDEURS ET MESURES

Les grandeurs ont joué jusqu'à l'époque des mathématiques modernes un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques et le calcul. Elles en ont alors disparu brutalement, ont été depuis réintroduites à l'école élémentaire et au collège, mais sans que le rôle que l'on souhaite leur faire jouer soit toujours clairement explicité. Nous voudrions ici souligner l'importance de leur prise en compte, pour donner sens au calcul mathématique, dans ses rapports avec le réel et les autres disciplines scientifiques.

Les grandeurs font partie de l'édifice mathématique dès l'antiquité. Le livre V des Éléments d'Euclide leur est consacré et c'est à travers elles qu'y est géré le calcul des quantités non discrètes, commensurables et incommensurables, qui n'ont pas, on le sait, dans les mathématiques grecques, le statut de nombre. Les grandeurs de même nature peuvent être comparées et additionnées. La théorie d'Eudoxe qui préfigure les réels est basée sur les rapports de grandeurs de même nature. Mais le produit de grandeurs, même de même nature, n'a pas nécessairement de sens.

La séparation du calcul entre calcul sur les nombres et calcul sur les grandeurs, à la base du calcul dans les mathématiques de l'antiquité, va perdurer dans les mathématiques pendant des siècles. L'unification du champ des nombres au XIX$^{\text{ème}}$ siècle va conduire à établir d'autres rapports entre grandeurs et nombres. On montrera que toute grandeur provient d'une mesure.

Ainsi, une fois choisie une unité, les grandeurs correspondent exactement aux nombres réels, construits eux à partir des entiers, ou à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. D'où la tentation d'oublier les grandeurs pour se situer directement dans le champ des nombres. C'est ce que fera la réforme des mathématiques modernes, évacuant par exemple la notion d'aire.

Il nous semble essentiel pourtant de garder dans l'enseignement, en particulier à l'école élémentaire et au collège, une place substantielle à la notion de grandeur et d'en expliciter les raisons :

- Le travail de modélisation qui, d'objets matériels comme des baguettes, des formes géométriques, des solides, conduit à un ensemble structuré de grandeurs : longueurs, aires, volumes, puis à des ensembles structurés de nombres via la mesure, est, nous semble-t-il, un moyen privilégié, dès l'école élémentaire, pour aider l'élève à comprendre que les mathématiques ne se lisent pas dans le réel mais se construisent pour le rendre plus intelligible, pour piloter et rendre plus efficaces nos actions sur lui.

- Un aplatissement trop rapide sur les nombres peut masquer le fait que toutes les numérisations n'ont pas le même statut : certaines ont une valeur de mesure, d'autres n'ont valeur que de repérage et l'addition des « mesures » donc corrélativement celle de moyenne arithmétique n'ont pas de sens dans le monde des objets concernés (cf. par exemple la température, déjà citée).

- La réduction numérique n'est pas sans effet non plus sur les moyens d'expression du calcul. Des écritures avec unités comme 1 m = 100 cm font sens dans le monde des grandeurs, on peut les transformer, les combiner pour comprendre des relations entre grandeurs et en produire de nouvelles. La réduction numérique des mathématiques modernes avait conduit, en France, à les bannir, privant le calcul lié aux changements d'unités de moyens de transcription, de pilotage et de contrôle efficaces, accentuant de plus la coupure avec les pratiques de calcul des autres disciplines.

- La réduction numérique a d'autres effets nocifs, en particulier concernant longueurs et aires en ramenant tout à un espace de dimension 1 : celui des réels.
Elle rend plus difficile la construction de la notion de dimension et favorise la confusion des grandeurs comme aire et périmètre, elle favorise aussi la réduction du calcul à l'application de formules sans contrôle, donc parfois hors de leur cadre de validité (l'aire d'un parallélogramme est calculée comme produit des longueurs des côtés), même lorsque des calculs ou des contrôles basés sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement par exemple sont possibles.

- Enfin, même si l'extension du champ des nombres, des entiers aux rationnels, décimaux et réels peut théoriquement s'effectuer sans référence aux grandeurs, on peut penser que c'est à travers des problèmes de mesure de grandeurs que les élèves peuvent vraiment ressentir, même très jeunes, le besoin mathématique de ces extensions.

Prendre en compte les grandeurs ne signifie par pour autant oublier les mesures et les nombres. L'enseignement sous-estime généralement la complexité des problèmes de mesure. La mesure met en jeu en effet différents univers.

- Il y a d'abord l'univers des **objets** et de leurs usages qui sont essentiels pour déterminer la finalité, la nature et les modalités des mesures ;

- il y a l'univers des **grandeurs** associées à ces objets, grandeurs mesurables ou simplement repérables et celui des mesures analogiques que ces grandeurs permettent sans recours au numérique (on mesurera par exemple un poids par l'allongement d'un peson, soit une longueur) ;

- il y a l'univers de la **mesure numérique** mettant en jeu unités et donc changements d'unités ;

- il y a l'univers pratique du **mesurage** et, associé à lui, tout ce qui relève de la métrologie, des erreurs, tolérances, intervalles de confiance, prenant en compte le fait que, le plus souvent, l'image d'un objet par l'application-mesure n'est pas un nombre mais un intervalle ou une distribution de probabilités ;

– il y a enfin ce qui relève d'un questionnement sur la **taille de la mesure**, son ordre de grandeur, sa « normalité » ou sa « rareté ».

REFERENCES

Dehaene S. (1996). *La bosse des maths*. Editions Odile Jacob, Paris.

Brousseau N. , Brousseau G. (1986). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux.

Lebesgue H. (1956). *La mesure des Grandeurs*. Gauthier-Villars, Paris.

Rouche N. (1992). *Le sens de la mesure*. Didier Hathier, Bruxelles.

Chevallard Y., Bosch M. (2000). *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée.* Petit x, 5-32.